

Αναλυτική γεωμετρία:

Μια απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ καλείται **ισομετρία** αν-ν:

$$d(f(p), f(q)) = d(p, q) \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$$

- $\text{Id} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$
- $T_v \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3) \quad \forall v$
- $f, g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3) \rightarrow f \circ g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$
- $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ και $f \rightarrow f^{-1} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$

Γεωμετρική Ισοτιμία

→ **Ορισμός:** Το σχήμα $S \subset \mathbb{R}^3$ καλείται **γεωμ. ισοτίμο** του $S' \subset \mathbb{R}^3$ αν-ν υπάρχει **ισομετρία** f και $f(S) = S'$

Γραμμικές Ισομετρίες ή Ορθογώνιοι Μετασχηματισμοί:

→ **Ορισμός:** Μια γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ καλείται **γραμμική ισομετρία** (ή **ορθογώνιος μετασχηματισμός**) αν-ν:

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

Παρατήρηση: Κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός είναι **ισομετρία**. Το σύνολο των ορθ. μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^3$ συμβολίζεται με $O(3)$.

$$O(3) \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $\{u_1, u_2, u_3\}$ ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{R}^3$, τότε κάθε $u \in \mathbb{R}^3$ δράφεται ως: $u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \langle u, u_3 \rangle u_3$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ώστε $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$
 $\langle u, u_1 \rangle = \lambda_1 \langle u, u_1 \rangle + \lambda_2 \langle u_2, u_1 \rangle + \lambda_3 \langle u_3, u_1 \rangle = \lambda_1$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $\{u_1, u_2, u_3\}$ ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{R}^3$ και $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική α.β και με πίνακα $A = (a_{ij})$ προς τα $\{u_1, u_2, u_3\}$
 Η F είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός αν-ν ο πίνακας A είναι ορθογώνιος δηλαδή ισχύει $AA^t = A^t A = I_3$

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$\det(AA^t) = 1 \Leftrightarrow \det A \cdot \det A^t = 1 \Leftrightarrow [\det(A)]^2 = 1 \Leftrightarrow \det A = \pm 1$$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν $F \in O(3)$ τότε υπάρχει η F και $F^{-1} \in O(3)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $F, g \in O(3) \Rightarrow F \circ g \in O(3)$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (ταξινόμηση των ισομετριών του $\mathbb{R}^3$) Κάθε $F \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ δράφεται ως: $F = T \circ g$, $g \in O(3)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ορίζω την απεικόνιση $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g = T \circ F$, $w = -F(0)$

$$g(0) = T(F(0)) = F(0) + w = 0$$

$$g(0) = 0 \quad (*) \quad d(g(x), g(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

$$d(g(x), g(0)) = d(x, 0) \Leftrightarrow$$

$$d(g(x), 0) = d(x, 0) \Leftrightarrow$$

$$\|g(x)\| = \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

$$(*) \quad \|g(x) - g(y)\|^2 = \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3 \quad (***)$$

Έστω $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^3$ $x \in \mathbb{R}^3$ $x = (x_1, x_2, x_3)$ $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$\langle g(e_i), g(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow \{g(e_1), g(e_2), g(e_3)\}$ ορθομοναδιαία β.α.

$$g(x) = \langle g(x), g(e_1) \rangle g(e_1) + \langle g(x), g(e_2) \rangle g(e_2) + \langle g(x), g(e_3) \rangle g(e_3)$$

$$= \langle x, e_1 \rangle g(e_1) + \langle x, e_2 \rangle g(e_2) + \langle x, e_3 \rangle g(e_3)$$

Ορθογωνιοί 2x2 πίνακες

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1 = a_{12}^2 + a_{22}^2 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0 \\ \cos\theta \cos\omega + \sin\theta \sin\omega &= 0 \Leftrightarrow \\ \cos(\theta - \omega) &= 0 \end{aligned}$$

$$a_{11} = \cos\theta \quad a_{12} = \cos\omega$$

$$a_{21} = \sin\theta \quad a_{22} = \sin\omega$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det = +1$$

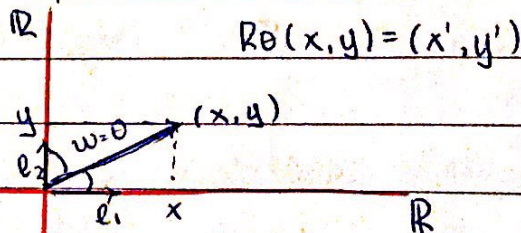
$$\det = -1$$

Έστω $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η γραμμική απεικ. που έχει ως πίνακα

$$\text{TOV:} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ως προς την βάση $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



$$R_\theta(x, y) = (x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle (x, y), (1, 0) \rangle}{\|(x, y)\| \|(1, 0)\|}$$

$$\frac{\langle (x, y), (1, 0) \rangle}{\|(x, y)\| \|(1, 0)\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\langle R_\theta(x, y), (x, y) \rangle}{\|R_\theta(x, y)\| \|(x, y)\|} = \frac{\langle (x', y'), (x, y) \rangle}{\sqrt{x'^2 + y'^2} \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{\langle (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta), (x, y) \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dots = \cos\theta$$

$$R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$$

$$R_{\theta} \circ R_{-\theta} = R_0 = Id$$

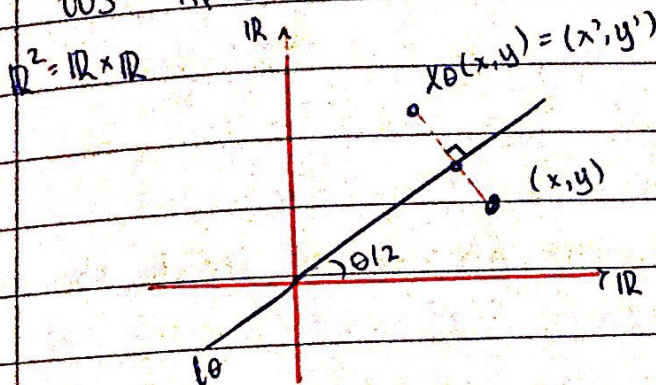
$$J = R_{\pi/2}$$

$$J^2 = J \circ J = R_{\pi/2} \circ R_{\pi/2} = R_{\pi} = -Id$$

$$J^2 = -Id \text{ \{μικαδίκη δομή\}}$$

Έστω $\chi_{\theta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η γραμμική απεικόνιση με πίνακα ως προς τη βάση $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$



$(x', y') =$ συμμετρικό του (x, y) ως προς την ευθεία l_{θ}

$$R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$$

$$R_{\theta} \circ \chi_{\theta} = \chi_{\phi}$$

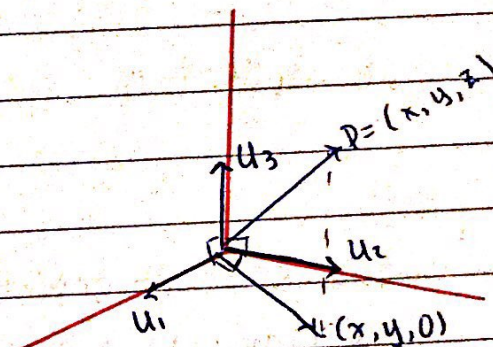
$$\chi_{\theta_1} \circ \chi_{\theta_2} = R_{\theta}$$

στροφή
γύρω από
αξονα.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \det = 1$$

ορθογώνιος πίνακας

$\{u_1, u_2, u_3\}$ ορθομ. βάση του $\mathbb{R}^3$



$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

γέφυρο-στροφή

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

δεν υπάρχουν στροφές στον $\mathbb{R}^3$